

## 三维接触压力分布的近似切平面拟合方法

(15)  
238-243

陈晓阳 马家驹 全永昕

44423.3  
0343.1

(机械设计研究所)

## 提 要

A

本文提出了用有限离散压力样本值的内在联系,分块构造接触压力分布拟合函数的新方法——近似切平面拟合方法,该方法提高了压力样本值的利用率,并能以形式简单的拟合函数较好地反映出拟合单元上接触压力分布沿网格划分方向的变化趋势,获得较高的拟合精度。

关键词:接触力学;接触压力;拟合方法

## 0 引 言

三维弹性接触问题数值解法和分析非 Hertz 弹性接触问题的基础。对于非二次曲面的接触问题、二维弹性流体动力润滑等问题,由于计算模型本身的复杂性和计算机容量、速度的限制,目前尚难以在叠代求解中获得较多的接触压力样本值,故如何根据有限的已知接触压力离散样本值恰当地拟合出接触压力分布函数常常是解题成败的关键。目前一般的解决方法是将接触区域划分成若干个网格单元,在一个网格单元或几个相邻的网格单元上,用多项式函数来拟合该局部区域上的接触压力分布。以形式简单的多项式函数高精度地拟合真实的接触压力分布,以使用较少的计算机内存快速求得问题的解,一直是近十几年来众多研究者不断追求的目标。

Dowson 和 Hamrock<sup>[1]</sup>用均匀矩形网格划分法,设接触压力在各网格单元上均匀分布,并以各网格单元中点的压力样本值为该网格单元上的接触压力分布函数,即用零次多项式作为接触压力分布的拟合函数。Biswas 和 Snidle<sup>[2]</sup>用均匀矩形网格划分法,以各网格单元上四个角点的压力样本值构成的两个三角形平面函数作为该网格单元上的压力分布函数,此法实际上是用内截三角形多面体的表面函数拟合接触压力分布。Ranger、Ettles 和 Cameron<sup>[3]</sup>用非均匀矩形网格划分法,利用等体积的概念以重叠四棱锥体拟合接触压力分布的体积,其拟合函数是

• 国家教委博士点基金资助课题

本文于 1992 年 1 月 27 日收到

双一次多项式。Bell<sup>[4]</sup>用非均匀矩形网格划分法,将各网格单元上四个角点的压力样本值所构成的双一次多项式作为该网格单元上的压力分布拟合函数。Hou、Zhu 和 Wen<sup>[5]</sup>,Lin 和 Chu<sup>[6]</sup>用非均匀矩形网格划分法,在每四个相邻的网格单元上,用其九个网格节点上的压力样本值按双二次多项式拟合相应区域上的压力分布函数,也就是说,接触压力分布拟合函数必须通过九个压力样本值。

上述各种拟合方法所用的多项式函数虽然阶次和项数不同,但方法的本质完全相同,即各拟合区域上的接触压力分布拟合多项式仅与本区域内的压力样本值有关,因而各多项式之间联系较弱,从而使各拟合区域边界上的函数值和导数值呈现大的阶跃。由于双二次多项式拟合法不仅用到拟合区域内九个压力样本值的大小,而且实际上还利用了这些压力样本值之间的相互关系,所以拟合精度较其它方法高,但它的表达式复杂,阶次高达4次,由九项组成;而零次多项式拟合法仅用到拟合区域内的一个压力样本值,所以表达形式简单,尽管在相同的网格划分下其拟合精度低于双二次多项式拟合法,但是用得极为普遍。

由于所有离散压力样本值的大小和位置之间的相互关系与接触压力分布的变化关系紧密相连,由此出发,本文提出“拟大用小”的分块构造接触压力分布拟合函数的新思想,运用外借手法,给出了用近似切平面函数分块拟合接触压力分布的方法。该拟合方法不仅用到了本拟合区域内的压力样本值大小,而且还借用了拟合区域周围四个单元中的四个压力样本值大小和位置之间的相互关系,从而能更全面地反映接触压力分布在该拟合区域内沿网格划分方向的变化关系,并以较简单的一次多项式函数获得较高的拟合精度。

## 1 近似切平面拟合方法

如图1所示,由于构造接触压力分布拟合函数的离散压力样本值是分布接触压力的有机组成部分,它们之间存在某种必然的、本质的联系。尤其是这些压力样本值的大小和位置之间的相互关系包含着丰富的压力分布变化的信息,这些变化主要反映在接触压力分布的各阶导函数中。假如能以某种方法将整个接触区域上的压力分布用一个函数拟合出来,则不管已知的压力样本值有多少,必定要用尽它们。但为便于数值计算,应尽可能用简单的多项式函数进行拟合,这就是目前采用网格划分接触区域,用区域型解析方法的关键所在。这样问题就转化为如何充分利用有限的压力样本值,使得局部区域上的拟合多项式尽量逼近真实的接触压力分布。

由图1可看出,只要网格划分足够细,保证所讨论的拟合区域上的接触压力分布单调或最多只有一个极值点,那么拟合区域中任一点 $(x, y)$ 是的压力值 $P(x, y)$ 将主要取决于其附近的压力样本值 $P_1, P_5, P_7$ 和 $P_8$ ,决定该区域上压力梯度的主要也是这些压力样本值的差值和相

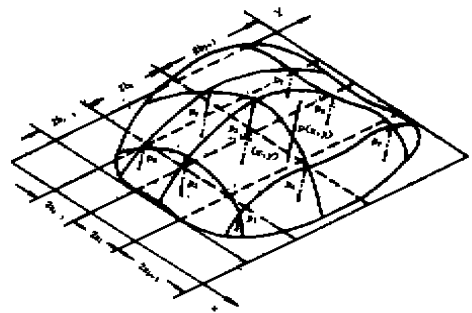


图1 压力值的相互关系

对位置,相对来说较远处的压力样本值  $P_1$  和  $P_3$  的影响要弱得多。

对于图 2 所示的非均匀网格划分,设各网格单元中点上的接触压力值已知,并以各网格单元为基本拟合单元,则单元  $A_{i,j}$  中点  $(x_i, y_j)$  的压力样本值  $P_{i,j}$  只能反映该单元上接触压力的大小是在此值的一定范围内变动,却无法反映它如何变化,以及变化的幅度有多大。后两个变化实际上只要用该压力样本值与其周围四个压力样本值彼此之间的差值和相对位置之间的关系即可确定,如用前差、后差或中间差。尽管它们不能给出这两个参数的真值,但可以给出它们的上、下确界。只要网格划分得足够细,所反映出的接触压力分布变化趋势无疑就是正确的,而且接触压力在拟合区域内的变化也就能够按给定的误差要求逼近真实的变化范围。

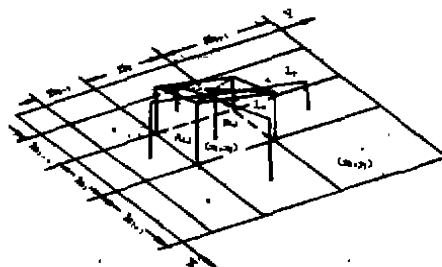


图 2 近似切平面拟合法

本文用  $P_{i,j}$  作为  $A_{i,j}$  单元上接触压力分布的参考值,用  $P_{i-1,j}$  和  $P_{i+1,j}$  构成的中间差作为  $A_{i,j}$  单元上接触压力分布沿  $X$  轴向的变化率,用  $P_{i,j-1}$  和  $P_{i,j+1}$  构成的中间差作为  $A_{i,j}$  单元上接触压力分布沿  $Y$  轴向的变化率,用  $P_{i,j-1}$  和  $P_{i,j+1}$  构成的中间差作为  $A_{i,j}$  单元上接触压力分布沿  $Y$  轴向的变化率;由此构成单元  $A_{i,j}$  上的一阶多项式形式的接触压力分布拟合函数:

$$P_{i,j}(x, y) = \frac{P_{i-1,j} - P_{i+1,j}}{a_{i-1} + 2a_i + a_{i+1}}(x - x_j) + \frac{P_{i,j-1} - P_{i,j+1}}{b_{j-1} + 2b_j + b_{j+1}}(y - y_j) + P_{i,j} \quad (1)$$

$$= c_1 x + c_2 y + c_3 \quad \left[ \begin{array}{l} x_i - a_i \leq x \leq x_i + a_i \\ y_j - b_j \leq y \leq y_j + b_j \\ i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right]$$

图 2 给出了式(1)的几何解释,即用过点  $(x_i, y_j, P_{i,j})$  并以两直线  $L_x$  和  $L_y$  的公法线为法向的平面作为真实接触压力分布函数在该点的近似切平面,并以此平面函数作为该点所在单元  $A_{i,j}(x_i - a_i \leq x \leq x_i + a_i, y_j - b_j \leq y \leq y_j + b_j)$  上的接触压力分布拟合函数,因此这一方法称为接触压力的近似切平面拟合法。该拟合方法不仅能反映点  $(x_i, y_j)$  的压力值大小,也能近似地反映出该点处压力分布沿  $X$  和  $Y$  轴向的变化趋势。

式(1)给出的接触压力分布拟合多项式是二元一次函数,其系数  $C_1 \sim C_3$  由网格的几何参数、单元中点的压力样本值和外借的四个相邻单元中点的压力样本值决定。

## 2 拟合精度分析

将式(1)在单元  $A_{i,j}$  上积分,然后在整个求解域上求和,即可得外载荷大小:

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{A_{i,j}} P_{i,j}(x,y) dx dy \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} A_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

式(2)右端项与 D-H 拟合方法<sup>[1]</sup>中的外载荷计算式相同,这说明这两种拟合方法对外载荷的拟合精度相等。

因为近似切平面拟合方法提高了已知的离散压力样本值的利用率,故能较好地反映出拟合单元上接触压力分布的变化趋势,图 3 给出了 Hertz 分布接触压力下过点  $(x_i, y_i)$  并沿 X 轴向的拟合截面,由图可知近似切平面拟合方法(粗实线)比 D-H 拟合方法(虚线)更真实的逼近实际接触压力分布(细实线)。三维弹性接触问题中的接触压力分布拟合函数逼近真实压力分布的程度对弹性变形等接触压力映射问题的数值分析精度影响很大。以表面弹性变形计算为例,其计算模型为:

$$\begin{aligned}
 d(x_k, y_l) &= \frac{2}{\pi E'} \iint_A \frac{P(x,y) dx dy}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_l)^2}} \\
 &= \frac{2}{\pi E'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[ \iint_{A_{i,j}} \frac{P_{i,j}(x,y) dx dy}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_l)^2}} \right] \quad \begin{cases} k = 1, \dots, n \\ l = 1, \dots, m \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

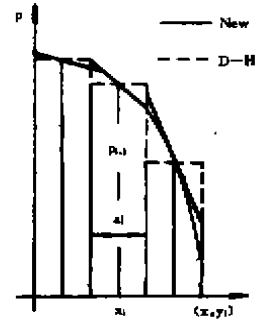
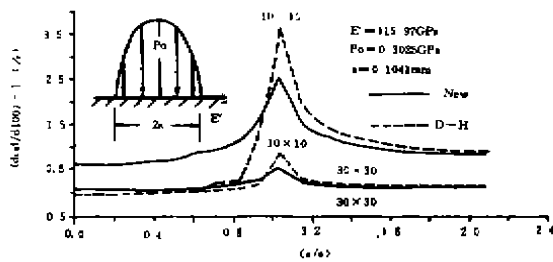
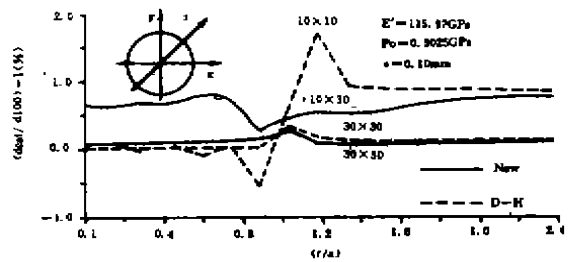


图 3 拟合截面的比较



a 沿 x 方向的计算结果



b 沿 r 方向的计算结果

图 4 表面弹性变形计算结果

图 4a 给出了弹性半无限体在 Hertz 分布接触压力作用下,圆形接触区域中沿网格划分方向半径上的表面弹性变形计算精度的变化,图 4b 为相同条件下,沿与网格划分方向成  $45^\circ$  的半径上表面弹性变形计算精度的变化,所有计算结果均与  $100 \times 100$  细网格上两种算法在相同点上较精确解的平均值进行比较。图中清楚地显示出不同半径方向上各点的收敛速度不一致,尤其是接触区域边界附近的误差比接触区域中部和外部大,在接触区域中部,因接触压力梯度小,用近似切平面拟合法得到的误差比 D-H 拟合法大;在接触区域边界附近,因接触压力梯度大,故用近似切平面拟合法得到的误差比 D-H 拟合法小,所以近似切平面拟合法比 D-H 法更适合于接触压力梯度变化大的三维弹性接触问题,如有限长线接触问题中接触区域的两端部,弹性流体动力润滑的出口处;而接触区域外部的弹性变形计算精度则主要取决于接触区域边界附近接触压力的拟合精度和计算点与接触区域的相对距离。从图 4 中不难发现,无论是粗网格划分还是细网格划分,用近似切平面拟合法得到的求解域上的最大误差均比 D-H 拟合法小,且最大误差与最小误差的差值也小于后者,这一点在重载弹性流体动力润滑问题的数值分析中特别重要。

### 3 结 论

(1) 利用离散压力样本值的相互关系,按“拟大用小”原则分块构造局部接触区域上的压力分布拟合多项式的新思想正确地反映出接触压力分布拟合的本质,开辟了提高有限的已知离散压力样本值利用率的新途径。

(2) 利用外借手法的近似切平面拟合方法所构造的接触压力分布拟合多项式能较好地反映出拟合单元上接触压力分布沿网格划分方向的变化趋势,其计算表达式是简单的二元一次函数,便于数值计算,拟合精度高。

### 参 考 文 献

- 1 Dowson, D. and Hamrock, B. J., Numerical evaluation of the surface deformation of elastic solids subjected to a Hertzian contact stress, ASLE Trans., Vol. 19, 1976, pp. 279~286
- 2 Biswas, S. and Snidle, R. W., Calculation of surface deformation in point contact EHD, Trans. of ASME, J. of Lub. Tech., Vol. 99, 1977, pp. 313~317
- 3 Ranger, A. P., Ettles, C. M. M. and Cameron, A., The solution of the point contact elasto-hydrodynamic problem, Proc. Roy. Soc., London, A, Vol. 346, 1975, pp. 227~244
- 4 Bell, J. C., Continuous analysis of stresses from arbitrary surface loads on a half space, Int. J. Solids Structures, Vol. 16, pp. 1069~1091
- 5 Hou, K. P., Zhu, D. and Wen, S. Z., A new numerical technique for computing surface elastic deformation caused by a given normal pressure distribution, Trans. of ASME, J. of Trib., Vol. 107, 1985, pp. 128~131

- 6 Lin, J. F. and Chu, H. Y., A numerical solution for calculating elastic deformation in elliptical—contact EHL of rough surface, Trans. of ASME, J. of Trib., Vol. 113, 1991, pp. 12~21

# The approximate tangent plane fitting method of three—dimensional contact pressure distribution

Chen Xiaoyang Ma Jia ju Quan Yongxin

(Institute of Machine Design)

## Abstract

A new method in which the contact pressure distribution function is piecewise fitted on a nonequidistant rectangle with finite discrete contact pressure samples is introduced in this paper. Using more information carried by pressure samples, the approximate tangent plane fitting method approaches the real pressure distribution much better than other methods with simple form and high accuracy.

**Key words:** contact mechanics; contact pressure; fitting method